Álgebra Linear

Trilha de Aprendizagem

Acesse aqui a trilha de aprendizagem

LTC

Álgebra Linear

Trilha de Aprendizagem

A **LTC Editora** apresenta uma novidade para você! Com base em metodologias ativas de ensino, desenvolvemos e disponibilizamos uma **trilha de aprendizagem**, composta por 15 planos de aula, para ser utilizada em conjunto com a 5ª edição do livro ***Álgebra Linear e Suas Aplicações***, de David C. Lay, Steven R. Lay e Judi J. McDonald.

Os planos de aula foram elaborados considerando quatro momentos do processo de aprendizagem:

PRÉ-AULA

- Propostas de leitura de páginas específicas do livro **Álgebra Linear e Suas Aplicações** e sugestões de videoaulas exclusivas. O objetivo é preparar o aluno para as atividades a serem desenvolvidas em sala de aula.

AULA

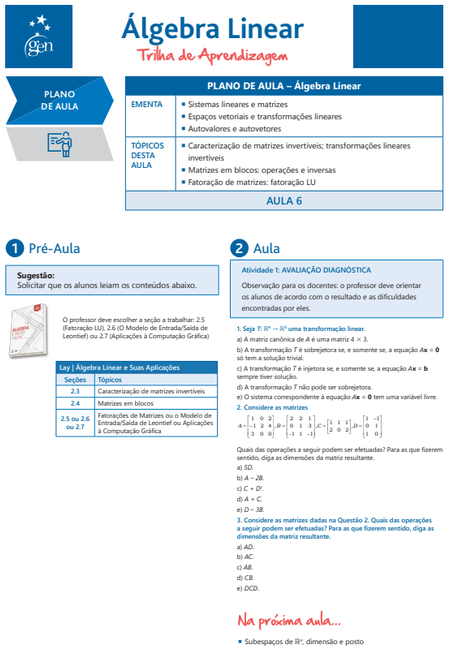
- Sugestão de realizar uma Avaliação Diagnóstica no início da aula para verificar o nivelamento do aprendizado. Em seguida, efetuar uma Avaliação Formativa, com aplicação e desenvolvimento de exercícios em parceria com os alunos. Ao final, o professor poderá apresentar os tópicos a serem abordados na aula seguinte e o conteúdo que deverá ser estudado para a pré-aula subsequente.

PÓS-AULA

- Indicação de atividades e problemas práticos. Caso a Instituição de Ensino tenha o software MATLAB disponível nos laboratórios, o professor poderá indicar o *Novo Projeto para o MATLAB: Aprendendo a Usar o MATLAB*.

NA PRÓXIMA AULA

- O professor poderá tirar dúvidas dos exercícios indicados como tarefa pós-aula.



Álgebra Linear

Trilha de Aprendizagem

PLANO DE AULA

PLANO DE AULA – Álgebra Linear	
EMENTA	▪ Sistemas lineares e matrizes ▪ Espaços vetoriais e transformações lineares ▪ Autovalores e autovetores
TÓPICOS DESTA AULA	▪ Caracterização de matrizes invertíveis; transformações lineares invertíveis ▪ Matrizes em blocos: operações e inversas ▪ Fatoração de matrizes: fatoração LU
AULA 6	

1 Pré-Aula

Sugestão:
Solicitar que os alunos leiam os conteúdos abaixo.

O professor deve escolher a seção a trabalhar: 2.5 (Fatoração LU); 2.6 (O Modelo de Entrada/Saída de Leontief) ou 2.7 (Aplicações à Computação Gráfica)

Lay | Álgebra Linear e Suas Aplicações	
Seções	Tópicos
2.3	Caracterização de matrizes invertíveis
2.4	Matrizes em blocos
2.5 ou 2.6 ou 2.7	Fatorações de Matrizes ou o Modelo de Entrada/Saída de Leontief ou Aplicações à Computação Gráfica

2 Aula

Atividade 1: AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

Observação para os docentes: o professor deve orientar os alunos de acordo com o resultado e as dificuldades encontradas por eles.

1. Seja $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear.

a) A matriz canônica de A é uma matriz 4×3.

b) A transformação T é sobrejetora se, e somente se, a equação $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ só tem a solução trivial.

c) A transformação T é injetora se, e somente se, a equação $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sempre tiver solução.

d) A transformação T não pode ser sobrejetora.

e) O sistema correspondente à equação $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem uma variável livre.

2. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Quais das operações a seguir podem ser efetuadas? Para as que fizerem sentido, diga as dimensões da matriz resultante.

a) $5D$.

b) $A - 2B$.

c) $C + D^T$.

d) $A + C$.

e) $D - 3B$.

3. Considere as matrizes dadas na Questão 2. Quais das operações a seguir podem ser efetuadas? Para as que fizerem sentido, diga as dimensões da matriz resultante.

a) AD.

b) AC.

c) AB.

d) CB.

e) DCD.

Na próxima aula...

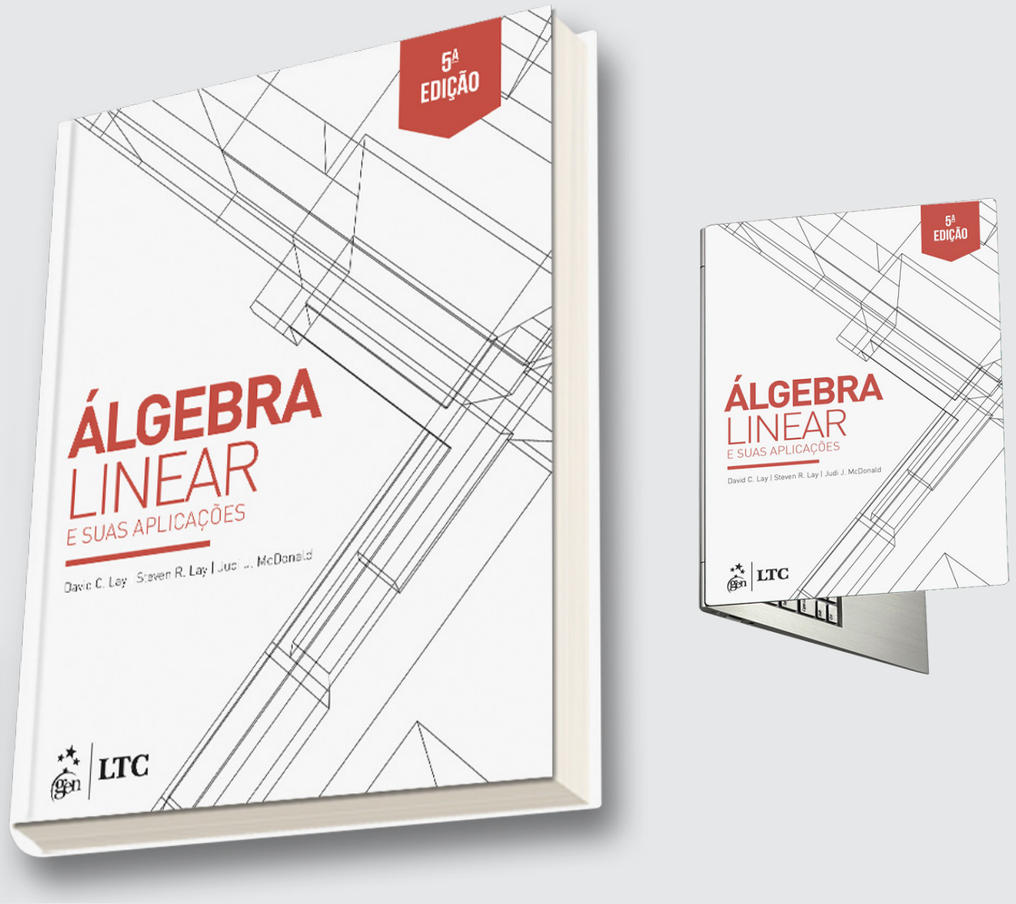
- Subespaços de $\mathbb{R}^n$, dimensão e posto

Estrutura do Plano de Aula sugerido

A trilha de aprendizagem completa está disponível no link
https://www.grupogen.com.br/trilhadeaprendizagem/AlgebraLinear
Será solicitado seu login ou cadastro no site do GEN | Grupo Editorial Nacional.

O clássico do ensino da Matemática!

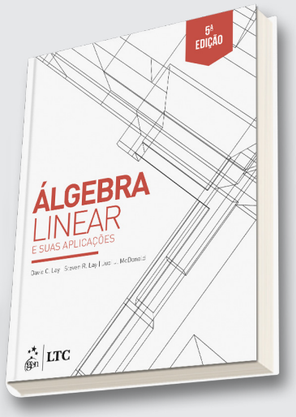
Aprenda Álgebra Linear com muito mais exercícios para a fixação do conteúdo.



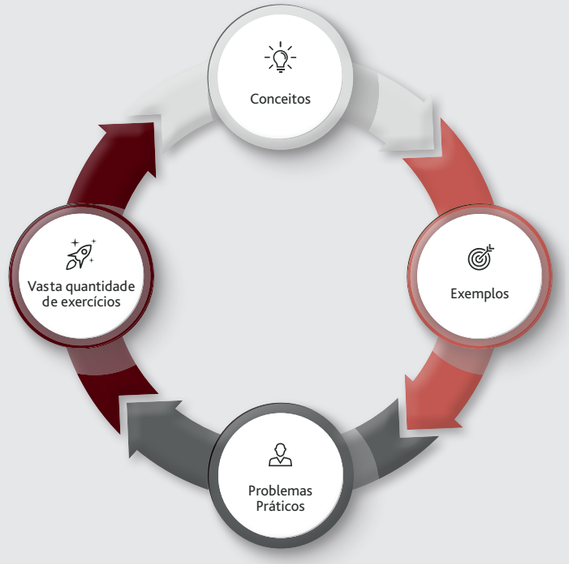
Nesta nova edição:

- Mais de 25% dos exercícios são novos ou foram atualizados, especialmente os computacionais.
- Foram incluídos Problemas Práticos Conceituais e suas soluções.
- Entre os materiais suplementares, há orientações básicas para utilização dos programas computacionais Maple, MATLAB, Mathematica e das calculadoras TI 83, 84 e 89.
- Disponível também na versão *e-book*.

ÁLGEBRA LINEAR E SUAS APLICAÇÕES



Autor: Lay/Lay/McDonald
ISBN: 9788521634959
Edição: 5|2018
Formato: 21 X 28
Páginas: 480
Selo Editorial: LTC



Oferece uma introdução ao tema e uma ampla seleção de aplicações práticas. É indicado para estudantes de graduação em nível intermediário que já dominem as disciplinas de Cálculo em geral. O objetivo é ajudar a desenvolver conceitos e habilidades básicos usados profissionalmente.

1 Equações Lineares na Álgebra Linear

EXEMPLO INTRODUTÓRIO

Modelos Lineares em Economia e Engenharia

Era o final do verão de 1949. Wassily Leontief, professor de Harvard, estava cuidadosamente inserindo o último cartão perfurado no computador Mark II da universidade. Os cartões continham informações sobre a economia americana e representavam um resumo de mais de 250.000 itens produzidos pelo Departamento de Estatística do Trabalho dos EUA após dois anos de trabalho intenso. Leontief dividiu a economia americana em 500 "setores", como indústria de carvão, indústria automobilística, comunicações e assim por diante. Para cada setor, ele escreveu uma equação linear que descrevia como o setor distribuía sua produção com respeito aos outros setores da economia. Uma vez que o Mark II, um dos maiores computadores de sua época, não podia lidar com o sistema resultante de 500 equações e 500 incógnitas, Leontief precisou resumir o problema em um sistema de 42 equações e 42 incógnitas.

A programação do computador Mark II para resolver as 42 equações de Leontief levou vários meses de trabalho, e ele estava ansioso para ver quanto tempo o computador demoraria para resolver o problema. O Mark II ronceu e pioceu durante 56 horas até que finalmente produziu uma solução. Vamos discutir a natureza dessa solução nas Seções 1.6 e 2.6.

Leontief, que ganhou o Prêmio Nobel de Economia de 1973, abriu a porta para uma nova era da modelagem matemática na economia. Seus esforços de 1949 em Harvard marcaram uma das primeiras aplicações significativas do computador na análise do que era então um modelo matemático de grande escala. Desde aquela época, pesquisadores de muitas outras áreas têm usado computadores para analisar modelos matemáticos. Por causa da enorme quantidade de dados envolvidos, os modelos são geralmente *lineares*; ou seja, são descritos por *sistemas de equações lineares*.

A importância da álgebra linear nas aplicações tem crescido de modo diretamente proporcional ao aumento do poder computacional, em que cada nova geração de hardware e software dispara uma demanda para capacidades ainda maiores. Assim, a ciência da computação está muito ligada à álgebra linear através do crescimento explosivo de processamento paralelo e de computação em grande escala.

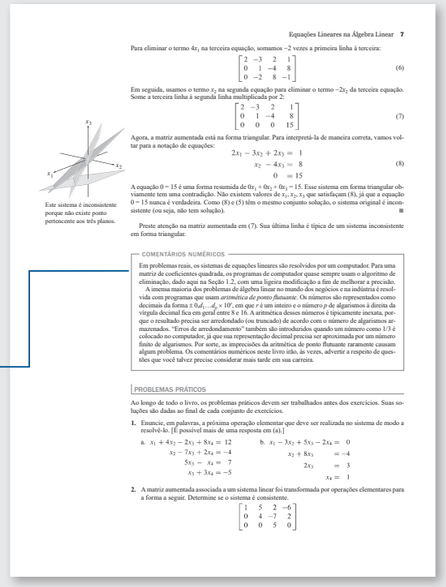
Na atualidade, cientistas e engenheiros trabalham em problemas muito mais complexos que se sonhava possíveis há algumas décadas. Hoje, a álgebra linear tem mais valor em potencial para os alunos, em muitas áreas científicas e de negócios, que qualquer outro assunto em matemática no âmbito graduação. O material deste texto fornece a base para o trabalho subsequente em muitas áreas interessantes. Aqui estão algumas possibilidades; outras serão descritas mais adiante.

- *Exploração de petróleo.* Quando um navio sai em busca de depósitos de petróleo submarinos, seus computadores resolvem milhares de sistemas de equações diferenciais *nados os dias*. Os dados sísmicos para as equações são obtidos a partir de ondas de choques submarinas geradas por explosões. As ondas são refletidas por rochas submarinas e medidas por gofones presos em longos cabos arrastados pelo navio.
- *Programação linear.* Hoje, muitas decisões gerenciais importantes são tomadas com base em modelos de programação linear que utilizam centenas de variáveis. As companhias aéreas, por exemplo, usam programas lineares para escalar o pessoal de bordo, monitorar as localizações das aeronaves no planeja- m diversas escalas dos serviços de apoio, como as operações de manutenção e de terminal.
- *Circuitos elétricos.* Os engenheiros usam programas de simulação para projetar circuitos elétricos e circuitos integrados envolvendo milhões de transistores. Os programas dependem de técnicas de álgebra linear e de sistemas de equações lineares.

1

Exemplo Introdutório

Os capítulos apresentam um Exemplo Introdutório e uma ilustração para contextualizar a aplicação da teoria na prática.



Equações Lineares na Álgebra Linear 7

Para eliminar o termo $4x_1$ na terceira equação, somamos -2 vezes a primeira linha à terceira:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & -2 & 8 & -1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Em seguida, usamos o termo x_2 na segunda equação para eliminar o termo $-2x_2$ da terceira equação. Some a terceira linha à segunda linha multiplicada por 2:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Agora, a matriz aumentada está na forma triangular. Para interpretá-la de maneira correta, vamos voltar para a notação de equações:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_2 - 4x_3 &= 8 \\ 0 &= 15 \end{aligned} \tag{8}$$

A equação $0 = 15$ é uma forma resumida de $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 15$. Esse sistema em forma triangular obviamente tem uma contradição. Não existem valores de x_1, x_2, x_3 que satisfaçam (8), já que a equação $0 = 15$ nunca é verdadeira. Como (8) e (5) têm o mesmo conjunto solução, o sistema original é inconsistente (ou seja, não tem solução). ■

Este sistema é inconsistente porque não existe ponto pertencente aos três planos.

Preste atenção na matriz aumentada em (7). Sua última linha é típica de um sistema inconsistente em forma triangular.

COMENTÁRIOS NUMÉRICOS

Em problemas reais, os sistemas de equações lineares são resolvidos por um computador. Para uma matriz de coeficientes quadrada, os programas de computador quase sempre usam o algoritmo de eliminação, dado aqui na Seção 1.2, com uma ligeira modificação a fim de melhorar a precisão.

A imensa maioria dos problemas de álgebra linear no mundo dos negócios e na indústria é resolvida com programas que usam *aritmética de ponto flutuante*. Os números são representados como decimais da forma $\pm 0.d_1 \ldots d_p \times 10^r$, em que r é um inteiro e o número p de algarismos à direita da vírgula decimal fica em geral entre 8 e 16. A aritmética desses números é tipicamente inexata, porque o resultado precisa ser arredondado (ou truncado) de acordo com o número de algarismos armazenados. "Erros de arredondamento" também são introduzidos quando um número como 1/3 é colocado no computador, já que sua representação decimal precisa ser aproximada por um número finito de algarismos. Por sorte, as imprecisões da aritmética de ponto flutuante raramente causam algum problema. Os comentários numéricos neste livro irão, às vezes, advertir a respeito de questões que você talvez precise considerar mais tarde em sua carreira.

PROBLEMAS PRÁTICOS

Ao longo de todo o livro, os problemas práticos devem ser trabalhados antes dos exercícios. Suas soluções são dadas ao final de cada conjunto de exercícios.

1. Enuncie, em palavras, a próxima operação elementar que deve ser realizada no sistema de modo a resolvê-lo. [É possível mais de uma resposta em (a).]

a. $\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 8x_4 &= 12 \\ x_2 - 7x_3 + 2x_4 &= -4 \\ 5x_3 - x_4 &= 7 \\ x_3 + 3x_4 &= -5 \end{aligned}$

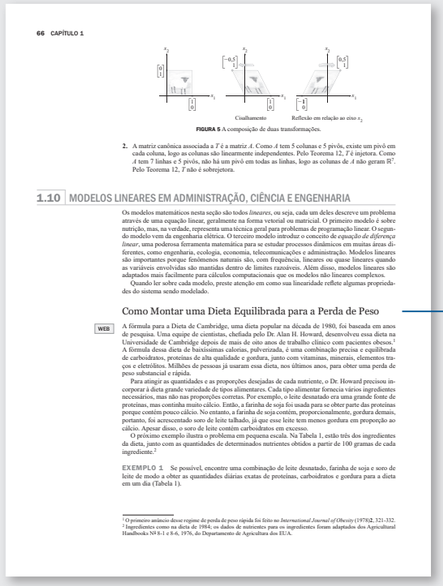
b. $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_2 + 8x_3 &= -4 \\ 2x_3 &= 3 \\ x_4 &= 1 \end{aligned}$

2. A matriz aumentada associada a um sistema linear foi transformada por operações elementares para a forma a seguir. Determine se o sistema é consistente.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Comentários Numéricos

Ao longo do livro, Comentários Numéricos advertem a respeito de questões que o estudante deverá considerar em sua carreira.



66 CAPÍTULO 1

FIGURA 5 A composição de duas transformações.

2. A matriz canônica associada a T é a matriz A. Como A tem 5 colunas e 5 pivôs, existe um pivô em cada coluna, logo as colunas são linearmente independentes. Pelo Teorema 12, T é injetora. Como A tem 7 linhas e 5 pivôs, não há um pivô em todas as linhas, logo as colunas de A não geram $\mathbb{R}^7$. Pelo Teorema 12, T não é sobrejetora.

1.10 MODELOS LINEARES EM ADMINISTRAÇÃO, CIÊNCIA E ENGENHARIA

Os modelos matemáticos nesta seção são todos *lineares*, ou seja, cada um deles descreve um problema através de uma equação linear, geralmente na forma vetorial ou matricial. O primeiro modelo é sobre nutrição, mas, na verdade, representa uma técnica geral para problemas de programação linear. O segundo modelo vem da engenharia elétrica. O terceiro modelo introduz o conceito de *equação de diferença linear*, uma poderosa ferramenta matemática para se estudar processos dinâmicos em muitas áreas diferentes, como engenharia, ecologia, economia, telecomunicações e administração. Modelos lineares são importantes porque fenômenos naturais são, com frequência, lineares ou quase lineares quando as variáveis envolvidas são mantidas dentro de limites razoáveis. Além disso, modelos lineares são adaptados mais facilmente para cálculos computacionais que os modelos não lineares complexos.

Quando ler sobre cada modelo, preste atenção em como sua linearidade reflete algumas propriedades do sistema sendo modelado.

Como Montar uma Dieta Equilibrada para a Perda de Peso

WEB

A fórmula para a Dieta de Cambridge, uma dieta popular na década de 1980, foi baseada em anos de pesquisa. Uma equipe de cientistas, chefiada pelo Dr. Alan H. Howard, desenvolveu essa dieta na Universidade de Cambridge depois de mais de oito anos de trabalho clínico com pacientes obesos.[1] A fórmula dessa dieta de baixíssimas calorias, pulverizada, é uma combinação precisa e equilibrada de carboidratos, proteínas de alta qualidade e gordura, junto com vitaminas, minerais, elementos traços e eletrólitos. Milhões de pessoas já usaram essa dieta, nos últimos anos, para obter uma perda de peso substancial e rápida.

Para atingir as quantidades e as proporções desejadas de cada nutriente, o Dr. Howard precisou incorporar à dieta grande variedade de tipos alimentares. Cada tipo alimentar fornecia vários ingredientes necessários, mas não nas proporções corretas. Por exemplo, o leite desnatado era uma grande fonte de proteínas, mas continha muito cálcio. Então, a farinha de soja foi usada para se obter parte das proteínas porque continêm pouco cálcio. No entanto, a farinha de soja contém, proporcionalmente, gordura demais, portanto, foi acrescentado soro de leite talhado, já que esse leite tem menos gordura em proporção ao cálcio. Apesar disso, o soro de leite contém carboidratos em excesso.

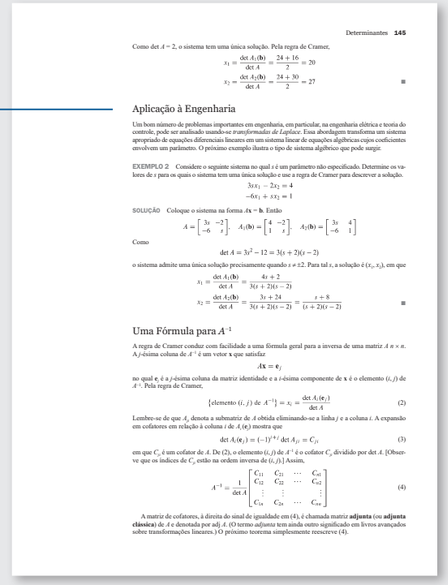
O próximo exemplo ilustra o problema em pequena escala. Na Tabela 1, estão três dos ingredientes da dieta, junto com as quantidades de determinados nutrientes obtidos a partir de 100 gramas de cada ingrediente.[2]

EXEMPLO 1 Se possível, encontre uma combinação de leite desnatado, farinha de soja e soro de leite de modo a obter as quantidades diárias exatas de proteínas, carboidratos e gordura para a dieta em um dia (Tabela 1).

[1] O primeiro anúncio sobre regime de perda de peso rápida foi feito no *International Journal of Obesity* (1979)2, 321-332.
[2] Ingredientes como na dieta de 1984; os dados de nutrientes para os ingredientes foram adaptados dos Agricultural Handbooks N0 8-1 e 8-6, 1976, do Departamento de Agricultura dos EUA.

Casos Práticos

A teoria, em alguns momentos, é exemplificada com casos práticos do dia a dia, que servem para aproximar o estudante do tema proposto. Por exemplo, os autores mostram um estudo de caso que envolve o uso da Álgebra Linear na criação de uma dieta alimentar.



Determinantes 145

Como $\det A = 2$, o sistema tem uma única solução. Pela regra de Cramer,

$$x_1 = \frac{\det A_1(\mathbf{b})}{\det A} = \frac{24+16}{2} = 20$$

$$x_2 = \frac{\det A_2(\mathbf{b})}{\det A} = \frac{24+30}{2} = 27 \qquad ■$$

Aplicação à Engenharia

Um bom número de problemas importantes em engenharia, em particular, na engenharia elétrica e teoria do controle, pode ser analisado usando-se *transformadas de Laplace*. Essa abordagem transforma um sistema apropriado de equações diferenciais lineares em um sistema linear de equações algébricas cujos coeficientes envolvem um parâmetro. O próximo exemplo ilustra o tipo de sistema algébrico que pode surgir.

EXEMPLO 2 Considere o seguinte sistema no qual s é um parâmetro não especificado. Determine os valores de s para os quais o sistema tem uma única solução e use a regra de Cramer para descrever a solução.

$$\begin{aligned} 3sx_1 - 2x_2 &= 4 \\ -6x_1 + sx_2 &= 1 \end{aligned}$$

SOLUÇÃO Coloque o sistema na forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Então

$$A = \begin{bmatrix} 3s & -2 \\ -6 & s \end{bmatrix}, \quad A_1(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix}, \quad A_2(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 3s & 4 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$$

Como

$$\det A = 3s^2 - 12 = 3(s+2)(s-2)$$

o sistema admite uma única solução precisamente quando $s \neq \pm 2$. Para tal s, a solução é (x_1, x_2), em que

$$x_1 = \frac{\det A_1(\mathbf{b})}{\det A} = \frac{4s+2}{3(s+2)(s-2)}$$

$$x_2 = \frac{\det A_2(\mathbf{b})}{\det A} = \frac{3s+24}{3(s+2)(s-2)} = \frac{s+8}{(s+2)(s-2)} \qquad ■$$

Uma Fórmula para A^{-1}

A regra de Cramer conduz com facilidade a uma fórmula geral para a inversa de uma matriz A $n \times n$. A j-ésima coluna de A^{-1} é um vetor $\mathbf{x}$ que satisfaz

$$A\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$$

no qual $\mathbf{e}_j$ é a j-ésima coluna da matriz identidade e a i-ésima componente de $\mathbf{x}$ é o elemento (i, j) de A^{-1}. Pela regra de Cramer,

$$\{\text{elemento } (i,j) \text{ de } A^{-1}\} = x_i = \frac{\det A_i(\mathbf{e}_j)}{\det A} \tag{2}$$

Lembre-se de que A_j denota a submatriz de A obtida eliminando-se a linha j e a coluna i. A expansão em cofatores em relação à coluna i de $A_i(\mathbf{e}_j)$ mostra que

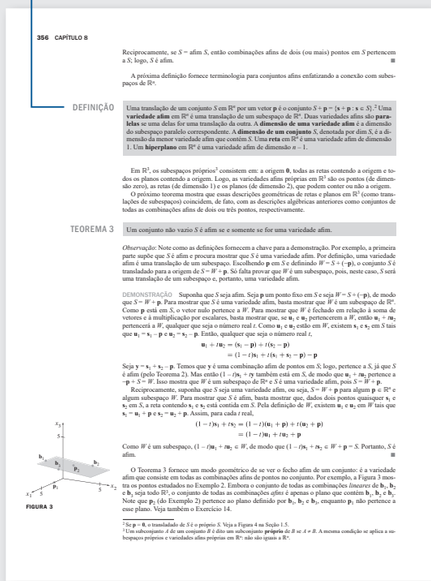
$$\det A_i(\mathbf{e}_j) = (-1)^{j+i} \det A_{ji} = C_{ji} \tag{3}$$

em que C_{ji} é um cofator de A. De (2), o elemento (i, j) de A^{-1} é o cofator C_{ji} dividido por $\det A$. [Observe que os índices de C_{ji} estão na ordem inversa de (i, j).] Assim,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \tag{4}$$

A matriz de cofatores, à direita do sinal de igualdade em (4), é chamada matriz **adjunta** (ou **adjunta clássica**) de A e denotada por adj A. (O termo *adjunta* tem ainda outro significado em livros avançados sobre transformações lineares.) O próximo teorema simplesmente reescreve (4).

Os assuntos apresentados obedecem a uma estrutura de organização que facilita o aprendizado:
- Definição
- Teorema
- Demonstração
- Exemplo



356 CAPÍTULO 8

Reciprocamente, se S = afim S, então combinações afins de dois (ou mais) pontos em S pertencem a S; logo, S é afim. ■

A próxima definição fornece terminologia para conjuntos afins enfatizando a conexão com subespaços de $\mathbb{R}^n$.

DEFINIÇÃO Uma translação de um conjunto S em $\mathbb{R}^n$ por um vetor $\mathbf{p}$ é o conjunto $S + \mathbf{p} = \{\mathbf{s} + \mathbf{p} : \mathbf{s} \in S\}$.[5] Uma **variedade afim** em $\mathbb{R}^n$ é uma translação de um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Duas variedades afins são **paralelas** se uma delas for uma translação da outra. A **dimensão de uma variedade afim** é a dimensão do subespaço paralelo correspondente. A **dimensão de um conjunto** S, denotada por dim S, é a dimensão da menor variedade afim que contém S. Uma **reta** em $\mathbb{R}^n$ é uma variedade afim de dimensão 1. Um **hiperplano** em $\mathbb{R}^n$ é uma variedade afim de dimensão $n - 1$.

Em $\mathbb{R}^3$, os subespaços próprios[6] consistem em: a origem $\mathbf{0}$, todas as retas contendo a origem e todos os planos contendo a origem. Logo, as variedades afins próprias em $\mathbb{R}^3$ são os pontos (de dimensão zero), as retas (de dimensão 1) e os planos (de dimensão 2), que podem conter ou não a origem.

O próximo teorema mostra que essas descrições geométricas de retas e planos em $\mathbb{R}^3$ (como translações de subespaços) coincidem, de fato, com as descrições algébricas anteriores como conjuntos de todas as combinações afins de dois ou três pontos, respectivamente.

TEOREMA 3 Um conjunto não vazio S é afim se e somente se for uma variedade afim.

Observação: Note como as definições fornecem a chave para a demonstração. Por exemplo, a primeira parte aplic que S é afim e procura mostrar que S é uma variedade afim. Por definição, uma variedade afim é uma translação de um subespaço. Escolhendo $\mathbf{p}$ em S e definindo $W = S + (-\mathbf{p})$, o conjunto S é transladado para a origem de $S - W = \mathbf{p}$. Só falta provar que W é um subespaço, pois, neste caso, S será uma translação de um subespaço e, portanto, uma variedade afim.

DEMONSTRAÇÃO Suponha que S seja afim. Seja $\mathbf{p}$ um ponto fixo em S e seja $W = S + (-\mathbf{p})$, de modo que $S = W + \mathbf{p}$. Para mostrar que S é uma variedade afim, basta mostrar que W é um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Como $\mathbf{p}$ está em S, o vetor nulo pertence a W. Para mostrar que W é fechado em relação à soma de vetores e à multiplicação por escalares, basta mostrar que, se $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ pertencerem a W, então $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ pertencerá a W, qualquer que seja o número real c. Como $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ estão em W, existem $\mathbf{s}_1$ e $\mathbf{s}_2$ em S tais que $\mathbf{u}_1 = \mathbf{s}_1 - \mathbf{p}$ e $\mathbf{u}_2 = \mathbf{s}_2 - \mathbf{p}$. Então, qualquer que seja o número real t,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 + t\mathbf{u}_2 &= (\mathbf{s}_1 - \mathbf{p}) + t(\mathbf{s}_2 - \mathbf{p}) \\ &= (1-t)\mathbf{s}_1 + t(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 - \mathbf{p}) - \mathbf{p} \end{aligned}$$

Seja $\mathbf{y} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 - \mathbf{p}$. Temos que $\mathbf{y}$ é uma combinação afim de pontos em S; logo, pertence a S, já que S é afim (pelo Teorema 2). Mas então $(1-t)\mathbf{s}_1 + t\mathbf{y}$ também está em S, de modo que $\mathbf{u}_1 + t\mathbf{u}_2$ pertence a $S - \mathbf{p} = W$. Isso mostra que W é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ e S é uma variedade afim, pois $S = W + \mathbf{p}$.

Reciprocamente, suponha que S seja uma variedade afim, ou seja, $S = W + \mathbf{p}$ para algum $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ e algum subespaço W. Para mostrar que S é afim, basta mostrar que, dados dois pontos quaisquer $\mathbf{s}_1$ e $\mathbf{s}_2$ em S, a reta contendo $\mathbf{s}_1$ e $\mathbf{s}_2$ está contida em S. Pela definição de W, existem $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ em W tais que $\mathbf{s}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{p}$ e $\mathbf{s}_2 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{p}$. Assim, para cada t real,

$$\begin{aligned} (1-t)\mathbf{s}_1 + t\mathbf{s}_2 &= (1-t)(\mathbf{u}_1 + \mathbf{p}) + t(\mathbf{u}_2 + \mathbf{p}) \\ &= (1-t)\mathbf{u}_1 + t\mathbf{u}_2 + \mathbf{p} \end{aligned}$$

Como W é um subespaço, $(1-t)\mathbf{u}_1 + t\mathbf{u}_2 \in W$, de modo que $(1-t)\mathbf{s}_1 + t\mathbf{s}_2 \in W + \mathbf{p} = S$. Portanto, S é afim. ■

O Teorema 3 fornece um modo geométrico de se ver o fecho afim de um conjunto: é a variedade afim que consiste em todas as combinações afins de pontos no conjunto. Por exemplo, a Figura 3 mostra os pontos estudados no Exemplo 2. Embora o conjunto de todas as combinações *lineares* de $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ e $\mathbf{b}_3$ seja todo $\mathbb{R}^3$, o conjunto de todas as combinações *afins* é apenas o plano que contém $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ e $\mathbf{b}_3$. Note que $\mathbf{p}_2$ (do Exemplo 2) pertence ao plano definido por $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ e $\mathbf{b}_3$, enquanto $\mathbf{p}_1$ não pertence a esse plano. Veja também o Exercício 14.

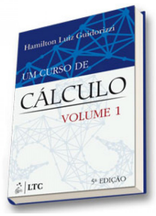
FIGURA 3

[5] Se $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, o translado de S é o próprio S. Veja a Figura 4 na Seção 1.5.
[6] Um subconjunto A de um conjunto B é dito um subconjunto **próprio** de B se $A \neq B$. A mesma condição se aplica a subespaços próprios e variedades afins próprias em $\mathbb{R}^n$: não são iguais a $\mathbb{R}^n$.

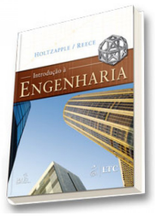
Há meio século produzindo os melhores conteúdos de Exatas!

1º semestre

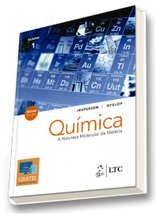
HALLIDAY/RESNICK/WALKER
Fundamentos de Física - Volume 1
Edição/Ano: 10/2016
ISBN: 9788521630357



GUIDORIZZI
Cálculo - Volume 1
Edição/Ano: 5/2001
ISBN: 9788521612599



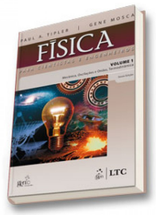
HOLTZAPPLE/REECE
Introdução à Engenharia
Edição/Ano: 1/2006
ISBN: 9788521615118



JESPERSEN/HISLOP
Química - A Natureza Molecular da Matéria - Volume 1
Edição/Ano: 7/2017
ISBN: 9788521632573

MCCAHAN ET AL.
Projetos de Engenharia - Uma Introdução
Edição/Ano: 1/2017
ISBN: 9788521634454

REIS/SILVA
Geometria Analítica
Edição/Ano: 2/1996
ISBN: 9788521610656



TIPLER/MOSCA
Física para Cientistas e Engenheiros - Volume 1
Edição/Ano: 6/2009
ISBN: 9788521617105

SILVA/RIBEIRO/DIAS/SOUSA
Desenho Técnico Moderno
Edição/Ano: 4/2006
ISBN: 9788521615224

2º semestre

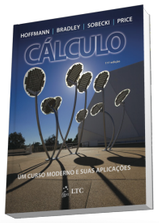
HALLIDAY/RESNICK/WALKER
Fundamentos de Física - Volume 2
Edição/Ano: 10/2016
ISBN: 9788521630364

GUIDORIZZI
Cálculo - Volume 2
Edição/Ano: 5/2001
ISBN: 9788521612803

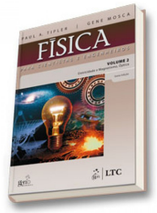
KOLMAN/HILL
Introdução à Álgebra Linear com Aplicações
Edição/Ano: 8/2006
ISBN: 9788521614784

JESPERSEN/HISLOP
Química - A Natureza Molecular da Matéria - Volume 2
Edição/Ano: 7/2017
ISBN: 9788521632580

CARVALHO/LORENA
Introdução à Computação - Hardware, Software e Dados
Edição/Ano: 1/2017
ISBN: 9788521631071

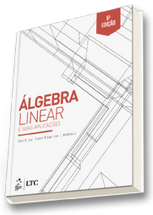


HOFFMANN ET AL.
Cálculo - Um Curso Moderno e Suas Aplicações
Edição/Ano: 11/2015
ISBN: 9788521625315



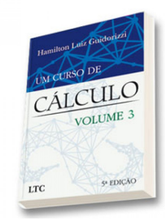
TIPLER/MOSCA
Física para Cientistas e Engenheiros - Volume 2
Edição/Ano: 6/2009
ISBN: 9788521617112

3º semestre



LAY/LAY/MCDONALD
Álgebra Linear e Suas Aplicações
Edição/Ano: 5/2018
ISBN: 9788521634959

HALLIDAY/RESNICK/WALKER
Fundamentos de Física - Volume 3
Edição/Ano: 10/2016
ISBN: 9788521630371

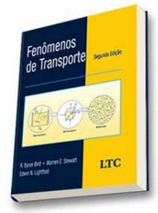


GUIDORIZZI
Cálculo - Volume 3
Edição/Ano: 5/2002
ISBN: 9788521612575

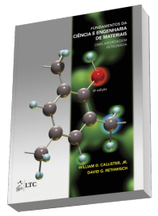
MERIAM/KRAIGE
Mecânica para Engenharia - Estática
Edição/Ano: 7/2016
ISBN: 9788521630135

BRAGANÇA/CRIVELARO
Fundamentos de Resistência dos Materiais
Edição/Ano: 1/2017
ISBN: 9788521630753

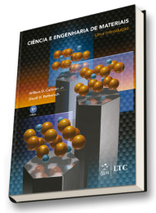
3º semestre



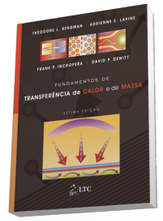
BIRD/STEWART/LIGHTFOOT
Fenômenos de Transporte
Edição/Ano: 2/2004
ISBN: 9788521613930



CALLISTER/RETHWISCH
Fundamentos da Ciência e Engenharia de Materiais - Uma Abordagem Integrada
Edição/Ano: 4/2014
ISBN: 9788521625179



CALLISTER/RETHWISCH
Ciência e Engenharia de Materiais - Uma Introdução
Edição/Ano: 9/2016
ISBN: 9788521631033



INCROPERA ET AL.
Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa
Edição/Ano: 7/2014
ISBN: 9788521625049

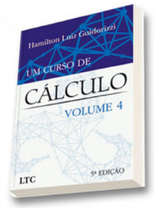
BRAGA FILHO
Fenômenos de Transporte para Engenharia
Edição/Ano: 2/2012
ISBN: 9788521620280

4º semestre

TIPLER/MOSCA
Física para Cientistas e Engenheiros - Volume 2
Edição/Ano: 6/2009
ISBN: 9788521617112

MOORE /NOTZ/FLIGNER
A Estatística Básica e Sua Prática
Edição/Ano: 7/2017
ISBN: 9788521634218

HALLIDAY/RESNICK/WALKER
Fundamentos de Física - Volume 4
Edição/Ano: 10/2016
ISBN: 9788521630388



GUIDORIZZI
Cálculo - Volume 4
Edição/Ano: 5/2002
ISBN: 9788521613305

MERIAM/KRAIGE
Mecânica para Engenharia - Dinâmica
Edição/Ano: 7/2016
ISBN: 9788521630142

MONTGOMERY/RUNGER
Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros
Edição/Ano: 6/2016
ISBN: 9788521632412

FOX ET AL.
Introdução à Mecânica dos Fluidos
Edição/Ano: 9/2018
ISBN: 9788521634812

BOYCE/DiPRIMA
Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno
Edição/Ano: 10/2015
ISBN: 9788521627357

HOFFMANN ET AL.
Cálculo - Um Curso Moderno e Suas Aplicações - Tópicos Avançados
Edição/Ano: 11/2015
ISBN: 9788521625322

TRIOLA
Introdução à Estatística
Edição/Ano: 12/2017
ISBN: 9788521633747

GUPTA/GUTTMAN
Estatística e Probabilidade
Edição/Ano: 1/2017
ISBN: 9788521630746

TIPLER/LLEWELLYN
Física Moderna
Edição/Ano: 6/2014
ISBN: 9788521626077

TIPLER/MOSCA
Física para Cientistas e Engenheiros - Volume 3
Edição/Ano: 6/2009
ISBN: 9788521617129

ATKINS/DE PAULA
Físico-Química - Volume 1
Edição/Ano: 10/2018
ISBN: 9788521634621

FARRER ET AL.
Programação Estruturada de Computadores - Algoritmos Estruturados
Edição/Ano: 3/1999
ISBN: 9788521611806

Saiba mais em www.grupogen.com.br

VÁ ALÉM DAS PÁGINAS DOS LIVROS!

Videoaulas exclusivas para reforçar o aprendizado dos seus alunos

- Conteúdos essenciais das principais disciplinas dos cursos de Engenharia
- Mais de 800 vídeos e 450 horas de teoria e prática
- Ferramenta indispensável para reduzir os altos índices de repetência e evasão
- Acesso *online* ou via *download*, com flexibilidade para que o aluno possa estudar quando, onde e na ordem que desejar
- Conteúdos planejados e produzidos pela **LTC Editora**, especializada nas áreas de Ciências Exatas/Tecnológicas, líder no segmento de publicações e conteúdos científicos, técnicos e profissionais no Brasil.

Acesse já

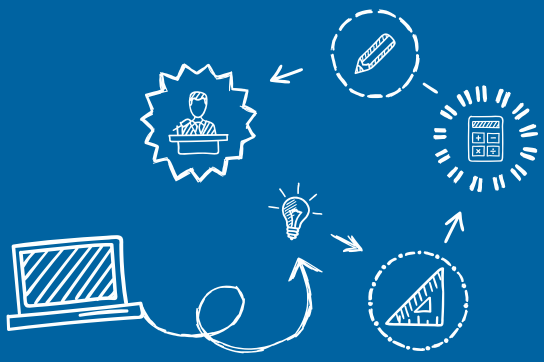
www.grupogen.com.br/exatas/videoaulas

Disciplinas disponíveis:

- Álgebra Linear
- Cálculo 1
- Cálculo 2
- Cálculo 4
- Cálculo Numérico
- Fenômenos de Transporte
- Física 1
- Física 2
- Física 3
- Física 4
- Geometria Analítica e Cálculo Vetorial
- Introdução à Engenharia
- Matemática Financeira
- Mecânica 1
- Pré-Cálculo
- Probabilidade e Estatística
- Química Geral 1
- Química Geral 2
- Química Orgânica
- Termodinâmica

Siga nossas redes sociais:

/GEN.Exatas

@grupogen_exatas

/LTCGEN